Aus dem LXIV. Bande der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. II. Abth. Dec.-Heft. Jahrg. 1871.

Über die diamagnetische Induction.

Von **J. Stefan,**

wirklichem Mitgliede der kais. Akademie der Wissenschaften.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Dec. 1871.)

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Ergänzung zu der „über die Gesetze der elektrodynamischen Induction“ [1]. In dieser wurden die Verschiedenheiten auseinandergesetzt, welche die Erscheinungen der elektrodynamischen, elektromagnetischen und magnetischen Induction in ihren Beziehungen zum Princip der Erhaltung der Energie darbieten. Es ist nachgewiesen worden, dass der Aufwand an chemischer Energie in den Ketten der in den Strombahnen entwickelten Wärme und der gleichzeitig geleisteten mechanischen Arbeit, wenn zwei elektrische Ströme auf einander wirken, nicht, wie in dem Fall der Wechselwirkung eines Stromes und eines Magnetes, äquivalent ist, sondern dass den chemischen Kräften im ersteren Falle noch eine andere Leistung obliegt, deren Arbeitswerth durch das Potential der beiden Ströme auf einander bestimmt ist. Diese Leistung kann als zur Hervorrufung eines eigenthümlichen Zustandes im umgebenden Medium verwendete betrachtet werden, jede Schwächung dieses Zustandes ist wieder von einer äquivalenten Wärmeentwicklung in den Strombahnen begleitet.

Auf Grundlage dieses Satzes sind Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in zwei wechselseitig aufeinander wirkenden Strombahnen aufgestellt und aus ihnen die Gesetze der elektrodynamischen Induction abgeleitet worden.

Es ist ferner gezeigt worden, dass auch die Gesetze der elektromagnetischen Induction aus diesen Gleichungen sich ableiten lassen, obwohl diese Gesetze von vorneherein die Noth-

[1] Sitzungsberichte LXIV.

wendigkeit der Betrachtung anderer Vorgänge, als der Wärmeentwicklung und der Arbeitsleistung auszuschliessen scheinen. Ebenso sind die Gesetze der magnetischen Induction aus denselben Gleichungen entwickelt worden und in der vorliegenden Abhandlung sollen in analoger Weise auch die Gesetze der diamagnetischen Induction aus ihnen gefolgert werden.

Die Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in zwei geschlossenen Stromleitungen sind

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2iU + i'V) \qquad (1)$$

$$e' = w'i' + \frac{d}{dt}(2i'U' + iV) \qquad (2)$$

Darin bedenten e und e' die elektromotorischen Kräfte, w und w' die Widerstände, i und i' die Stromintensitäten in den zwei Bahnen. Ferner bedeutet U das Potential der ersten, U' das der zweiten Leitung auf sich selbst, V das Potential der beiden Leitungen auf einander unter der Voraussetzung von Stromstärken, welche der Einheit gleich sind.

Zu diesen zwei Gleichungen kommt noch eine dritte für den Zuwachs dL der lebendigen Kraft, welchen die beiden Leiter in der Zeit dt durch die Wirkung äusserer und der elektrodynamischen Kräfte erfahren.

$$dL = dA + i^2 dU + i'^2 dU' + ii' dV \qquad (3)$$

worin dA die Arbeit, welche die äusseren Kräfte in der Zeit dt leisten, bedeutet.

Zur Erklärung des Verhaltens diamagnetischer Körper aus den vorstehenden Gleichungen genügt es, mit Weber anzunehmen, „dass ein Wismuthstab aus Molecülen besteht, welche in sich zurücklaufende Bahnen (oder Canäle) enthalten, in denen die elektrischen Fluida ohne Widerstand beweglich sind, während sie in allen anderen Bahnen nur mit Überwindung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstands beweglich sind. Die Entstehung eines reinen, mit Magnetismus nicht vermischten Diamagnetismus setzt ausserdem voraus, dass die Molecüle mit jenen Bahnen oder Canälen

nicht drehbar sind; denn sonst würden drehbare Molecularströme entstehen, die, wie Ampère bewiesen hat, einen magnetischen Zustand zur Folge haben, wenn sich bei der Drehung ihre Intensität nicht ändert".

An Stelle des zweiten Stromleiters, auf den sich die mit Strichen versehenen Grössen in den Gleichungen (1, 2, 3) beziehen, soll nun ein solches Wismuthmolecül, dessen Strombahn keinen Widerstand und auch keine eigenthümliche elektromotorische Kraft besitzt, gesetzt werden. Es ist also in Gleichung (2)

$$e' = 0 \text{ und } w' = 0$$

einzuführen und bleibt

$$\frac{d}{dt}(2i'U' + iV) = 0$$

Ferner setze ich voraus, dass die Strombahn des Wismuthmolecüls, wenn kein inducirender Strom auf dieselbe wirkt, stromlos ist, dass also

$$i' = 0 \text{ wenn } iV = 0$$

dann verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$2i'U' + iV = 0 \tag{4}$$

welche jetzt an die Stelle der Gleichung (2) zu treten hat.

Die Grössen U, U', V sind an sich positiv. Diese Gleichung lehrt demnach, dass i' immer das entgegengesetzte Zeichen von i hat.

Der Einfachheit wegen setze ich ferner voraus, dass die Strombahn des Wismuthmolecüls von unveränderlicher Gestalt ist. Dann ist i' dem i proportional und der Proportionalfactor nur abhängig von der relativen Lage des inducirenden Stromes gegen das Wismuthmolecül.

Aus der Gleichung (4) folgt ferner

$$i'^2 U' = -\frac{ii'V}{2} \tag{5}$$

das Potential des im Wismuthmolecül inducirten Stromes auf sich selbst ist immer halb so gross, als

das Potential des inducirenden Stromes auf den inducirten.

Es sollen nun folgende specielle Fälle betrachtet werden:

1. Schliessung und Unterbrechung eines Stromes in der Nähe eines Wismuthmoleculs.

Bleibt die Gestalt des Stromleiters unverändert, ebenso die relative Lage desselben gegen das Wismuthmolecül, so sind U und V ebenso wie U' constante Grössen. Die Gleichung (1) verwandelt sich in

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + V\frac{di'}{dt}$$

oder wenn man für i' den Werth aus (4) einsetzt

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} - \frac{V^2}{2U'}\frac{di}{dt} \tag{6}$$

In dieser Formel stellt $2U\frac{di}{dt}$ die der elektromotorischen Kraft e entgegenwirkende Induction, welche der Leiter auf sich selbst ausübt, dar. Das letzte Glied stellt die elektromotorische Kraft des durch die Anwesenheit des Wismuthmolecüls verursachten Inductionsstromes dar, dieser ist also mit dem Strom i gleich gerichtet. Durch die Anwesenheit des Wismuthmolecüls wird das Ansteigen des Stromes i beschleunigt.

Das Integral der Gleichung (6) ist leicht herzustellen. Zur Bestimmung der Integrationsconstante dient die Bedingung $i = 0$ für $t = 0$.

Die von den chemischen Kräften in der Kette geleistete Arbeit ist gegeben durch

$$\int eidt = \int wi^2dt + i^2U - \frac{V^2}{4U'}i^2 \tag{7}$$

oder mit Benützung der Gleichungen (4) und (5) durch

$$\int eidt = \int wi^2dt + i^2U + i'^2U' + ii'V$$

Diese Gleichung macht die Verwandlung der Energie der chemischen Kräfte ($\int eidt$) in die in der Leitung auftretende

Wärme ($\int wi^2dt$), in das Potential des Stromes i auf sich selbst (i^2U), in das Potential des Stromes i' auf sich selbst (i'^2U') und in das Potential dieser beiden Ströme auf einander ($ii'V$) ersichtlich. Da letzteres Potential aber negativ und dem absoluten Werthe nach doppelt so gross als i'^2U', so ist, wie die Gleichung (7) auch unmittelbar zeigt, die auf Potentialerzeugung aufgewendete Energie kleiner, wenn die Kette in der Nähe eines Wismuthmolecüls geschlossen wird, als wenn dies bei Abwesenheit eines solchen geschieht, und zwar kleiner um

$$\frac{V^2}{4U'}i^2 = -\frac{ii'V}{2} = i'^2U'$$

Die Umwandlung der während der Schliessung einer Kette auf Potentialerzeugung verwendeten Energie in Wärme geht bei der Öffnung der Kette vor sich, sie bildet den Extrastrom.

Es muss also umgekehrt die durch den Extrastrom in der Leitung entwickelte Wärme kleiner sein, wenn die Kette in der Nähe eines Wismuthmolecüls geöffnet wird, als wenn dies bei Abwesenheit eines solchen Molecüls geschieht, und zwar ist die entwickelte Wärme kleiner um

$$\frac{V^2}{4U'}i^2.$$

Es gibt dies auch die Gleichung (6), in welcher für den Fall der Öffnung der Kette $e = 0$ gesetzt und bei der Integration $i = \frac{e}{w}$ für $t = 0$ genommen werden muss. Es folgt

$$\int wi^2dt = i^2U - \frac{V^2}{4U'}i^2.$$

2. Bewegung eines Wismuthmolecüls durch einen Strom.

Wird vorausgesetzt, dass die Leitung des Stromes i ihre Gestalt unverändert beibehält, so kommt die Gleichung (1) jetzt in der Form

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + \frac{d}{dt}(i'V) \qquad (8)$$

zur Anwendung. Dazu kommt noch die Gleichung (3), welche wenn keine anderen als die elektrodynamischen Kräfte thätig sind, sich zusammenzieht auf

$$dL = ii'dV.$$

Da i' negativ ist, so ist eine Bewegung des Wismuthmolecüls durch den Strom nur in der Richtung des abnehmenden V möglich. Die dem Molecül während der Abstossung desselben in unendliche Entfernung ertheilte lebendige Kraft ist bestimmt durch

$$L = \int ii'dV = -\frac{1}{2U'}\int i^2 VdV.$$

Hat i einen so grossen Werth, dass die Änderung desselben während der Fortschiebung des Wismuthmolecüls vernachlässigt werden kann, so hat man

$$L = -\frac{i^2}{2U'}\int VdV = \frac{i^2V^2}{4U'} = -\frac{ii'V}{2}$$

da der Endwerth von V für unendliche Entfernung $= 0$ ist.

Die gewonnene lebendige Kraft ist also gleich dem halben Anfangswerthe des Potentials des Stromes i auf den Strom im Wismuthmolecül.

Die gleichzeitig von den chemischen Kräften entwickelte Energie ist nach Gleichung (8)

$$\int eidt = \int wi^2dt + \int id(i'V).$$

Das Glied Ui^2 fällt weg, da Anfangs- und Endwerth von i gleich sind.

Die nicht in Wärme innerhalb der Strombahn verwandelte Energie ist

$$\int id(i'V) = i\int d(i'V) = -ii'V$$

unter Vernachlässigung der Veränderlichkeit von i. Die von den chemischen Kräften während der Fortschie-

bung des Wismuthmolecüls verrichtete Arbeit ist also doppelt so gross, als die von dem Molecül gewonnene lebendige Kraft. Es muss nämlich die eine Hälfte dieser Arbeit nun jenen Betrag an Potential erzeugen, um welchen bei Schliessung des Stromes wegen der Nähe des Wismuthmolecüls weniger erzeugt worden ist, und dieser Betrag ist, wie vorhin gezeigt wurde $-\frac{ii'V}{2}$. Um eben diesen Betrag wird auch bei der Unterbrechung des Stromes nach Entfernung des Wismuthmolecüls der Extrastrom mehr Wärme in der Leitung entwickeln, als er bei Unterbrechung in der Nähe des Wismuthmolecüls entwickeln würde.

3. Bewegung eines Wismuthmolecüls durch einen Magnet.

Ein Magnet kann als ein System von Strömen, welche mit gleicher und unveränderlicher Intensität in widerstandslosen, gegen einander verschiebbaren Bahnen fliessen, betrachtet werden. Wird statt des einen vom Strom i durchflossenen Leiters ein Magnet angenommen, so ist die Gleichung (1) zu ersetzen durch so viele Gleichungen als Ströme im Magnete existiren. In jeder solchen Gleichung ist die elektromotorische Kraft und der Widerstand Null zu setzen und enthält dieselbe ausser dem Potential eines Stromes auf sich selbst die Potentiale dieses auf alle übrigen im Magnete und auf den Strom im Wismuthmolecül. Die Summe aller dieser Gleichungen nimmt jedoch wieder die Form

$$0 = \frac{d}{dt}(2iU + i'V)$$

an. Darin bedeutet jetzt U das Gesammtpotential des den Magnet bildenden Stromsystems, V das Potential dieses Systemes auf den Strom im Wismuthmolecül, alle diese Ströme von der Einheit der Intensität vorausgesetzt.

Da i eine constante Grösse, so ist auch

$$0 = \frac{d}{dt}(2i^2U + ii'V).$$

Wird wieder, wie in der früheren Abhandlung,

$$i^2U = P,\quad iV = W$$

gesetzt, so treten an die Stelle der Gleichungen (1), (4) und (3) die folgenden

$$\frac{d}{dt}(2P + iW) = 0 \tag{9}$$

$$2iU + W = 0 \tag{10}$$

$$dL = dA + dP + i\,dW. \tag{11}$$

Zu den äusseren, d. h. nicht elektrodynamischen Kräften, deren Arbeitselement mit dA bezeichnet ist, sind nun auch die in Magneten thätigen Coërcitivkräfte zu rechnen. Sind ausser diesen keine anderen äusseren Kräfte vorhanden, so bedeutet dA das Element der Arbeit, welche die Coërcitivkräfte bei einer gegenseitigen Verschiebung der Elementarströme im Magnete leisten und kann man, wie auch in der früheren Abhandlung geschehen, für Stahlmagnete

$$dA + dP = 0 \tag{12}$$

setzen, so dass die Gleichung (11) sich zu

$$dL = i\,dW \tag{13}$$

vereinfacht.

Die Gleichung (10) gibt die Stärke des durch den Magnet im Wismuthmolecül inducirten Stromes.

$$i = -\frac{W}{2U} \tag{14}$$

Es folgt aus ihr ferner nach Multiplication mit i

$$i^2U = -\frac{iW}{2}. \tag{15}$$

der Satz, dass das Potential des Stromes im Wismuthmolecül auf sich selbst gleich ist dem halben Potential des Magnetes auf diesen Strom, letzteres Potential dem absoluten Werthe nach genommen.

Die Gleichung (9) gibt die Beziehung zwischen dem Potential des Magnetes auf sich selbst und seinem Potential auf den Strom im Wismuthmolecül oder dem Potential dieses auf sich selbst. Da $i'W$ negativ ist, so lehrt diese Gleichung, dass die Annäherung eines Wismuthmolecüls an einen Magnet, mit welcher $i'W$ dem absoluten Werthe nach wächst, auch ein Wachsthum von P verbunden ist, d. h. bei Annäherung eines Wismuthmolecüls an einen Magnet wird dieser schwächer, umgekehrt bei Entfernung des Molecüls stärker.

Eine Bewegung des Wismuthmolecüls durch die magnetischen Kräfte ist, da i' negativ, nur in der Richtung der abnehmenden W möglich. Die während der Abstossung in unendliche Entfernung dem Wismuthmolecül ertheilte lebendige Kraft ist nach (13)

$$L = \int i' d W$$

oder mit Benützung der Gleichung (14)

$$L = -\frac{1}{2U'}\int W d W = \frac{W^2}{4U'} = -\frac{i'W}{2}.$$

Die dem Wismuthmolecül ertheilte lebendige Kraft ist gleich dem halben Anfangswerthe des Potentials des Magnetes auf den Strom im Wismuthmolecül.

Während dieser Abstossung verschwindet das Potential des Stromes im Wismuthmolecül auf sich selbst $\left(i'^2U' = -\frac{i'W}{2}\right)$ und das Potential dieses Stromes auf den Magnet ($i'W$). In Wirklichkeit tritt also eine Potentialvermehrung um $-\frac{i'W}{2}$ ein. Das Äquivalent derselben bildet die Verminderung des Potentials des Magnetes auf sich selbst, welche nach Gleichung (9)

$$\int dP = -\int d\left(\frac{i'W}{2}\right) = \frac{i'W}{2}$$

beträgt.

Als Äquivalent der vom Wismuthmolecül gewonnenen lebendigen Kraft bleibt nun nach Gleichung (12)

die Arbeit der gleichzeitg thätigen Coërcitivkräfte im Magnete übrig, die durch

$$A = -\int dP = -\frac{i^2 W}{2} = L$$

bestimmt ist.

In ähnlicher Weise wie für ein einzelnes magnetisches Molecül lassen sich auch für ein System von solchen Molecülen die analogen Sätze gewinnen.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdrukerei in Wien.